Université Claude Bernard – Lyon 1
Année universitaire 2013-2014

Techniques Mathématiques de Bases
Licence 1 (PCSI)

Feuille 5 : Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Formule de Taylor-Lagrange, Intégration

---

Exercice 1 .
1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable telle que* f' *s'annule précisément* n *fois. Montrer que* f *s'annule au plus* $n+1$ *fois.*
2. *En déduire que le polynôme* $P(X) = X^{20000} + X + 1$ *a au plus* 2 *racines réelles.*

Exercice 2 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $[0,1[$, *telle que* $f(0) = f(1) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *telle que* $g(0) = 0$ *et* $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ *si* $x \neq 0$.
Vérifier qu'on peut appliquer le théorème de Rolle à g*, et en déduire l'existence de* $a \in]0,1[$ *tel que* $f'(a) = \frac{f(a)}{a}$.
Interpréter géométriquement.

Exercice 3 *A l'aide de la formule des accroissements finis, montrer que* $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$ *pour* $x \geq 0$.

Exercice 4 *A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que* $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ *pour* $x \geq 0$.

Exercice 5 *A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, calculer* $\cos(0,1)$ *à* 10^{-8} *près.*

Exercice 6 *Développer le polynôme* $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 3$ *suivant les puissances de* $x - 2$.

Exercice 7 *A l'aide de changements de variables indiqués, déterminer les intégrales suivantes :*

(a) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ $\quad (x = \frac{1}{t})$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $\quad (x = -\ln t)$.

(c) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7\, dx$ $\quad (t = 5x^2-3)$.

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $\quad (t = \sqrt{x+1})$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ $\quad (x = \tan u)$.

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\, dx$ $\quad (u = \sin x)$.

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$ $\quad (t = \sqrt{x})$.

(h) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}\, dx$ $\quad (t = \sqrt{4x+2})$.

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$ $\quad \left(t = \sqrt{\tfrac{x+2}{3-x}}\right)$.

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\, dx$ $\quad (t = e^x)$.

Exercice 8 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $f(a) = 0$.*

1. *Montrer que $f^2(x) \leq (x-a)\displaystyle\int_a^x f'^2(t)\, dt$ pour tout $x \in [a, b]$.*

2. *En déduire que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(t)\, dt$.*

Exercice 9 *Déterminer les primitives de* $f(x) = x^2(x^3+1)^4$. *Donner la primitive qui s'annule pour* $x = 1$.

Exercice 10 *Calculer les intégrales suivantes :*

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

(b) $\displaystyle\int (5-2x)^3\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3-7)^5}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \tan x\ dx$

(g) $\displaystyle\int \tan^2 x\ dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{2+\cos(3x)}\ dx$

(i) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (\sin x)\ln(1+x^2)\ dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2}\ dx$

Exercice 11 *Calculer la dérivée de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\sin x} e^{-t^2}\ dt$.

Exercice 12 *Calculer par parties les intégrales suivantes :*

(a) $\displaystyle\int xe^{-x}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \ln x\ dx$

(c) $\displaystyle\int x^2\cos(3x)\ dx$

(d) $\displaystyle\int_3^2 x^2\ln x\ dx$

(e) $\displaystyle\int x\arctan x\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \arctan x\ dx$

(h) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\ dx$

Exercice 13 .

1. *Trouver* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $\dfrac{1}{x(2x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{2x+1}$ *pour* $x \neq 0, -\dfrac{1}{2}$.

2. *En déduire* $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2x+1)}$.

3. *Calculer par parties* $\displaystyle\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\ dx$.

Exercice 14 .

1. *A l'aide de plusieurs intégrations par parties, déterminer* $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\ dx$ *et* $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)\ dx$.

2. *Retrouver le résultat précédent à l'aide de* $\displaystyle\int e^{(2+3i)x}\ dx$.

Quelle méthode est la plus rapide ?

Exercice 15 *A l'aide d'exponentielles complexes, déterminer les primitives :*

(a) $\displaystyle\int \sin^4 x\ dx$

(b) $\displaystyle\int \cos x\cos(3x)\sin(5x)\ dx$

Exercice 16 *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *à l'aide d'une intégration par parties, exprimer* I_{n+2} *en fonction de* I_n.

2. *Calculer* I_0 *et* I_1, *puis donner une formule pour* I_{2k} *et* I_{2k+1} $(k \in \mathbb{N})$.

Exercice 17 .

1. *Trouver* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tels que* $\dfrac{x^3-2x}{x+1} = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x+1}$ *pour* $x \neq -1$.

2. *En déduire* $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\ dx$.

Exercice 18 .

1. *A l'aide d'un changement de variables* $t = f(x)$ *adéquat, déterminer* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ *en se ramenant à* $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1}$.

2. *Expliciter* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx$.

3. *A l'aide de 1 et 2, déterminer* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\ dx$.